

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελληνίων Εξετάσεων Ημερησίων Γενικών Λυκείων

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ.334

A2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ.246

A3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ.222

A4. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

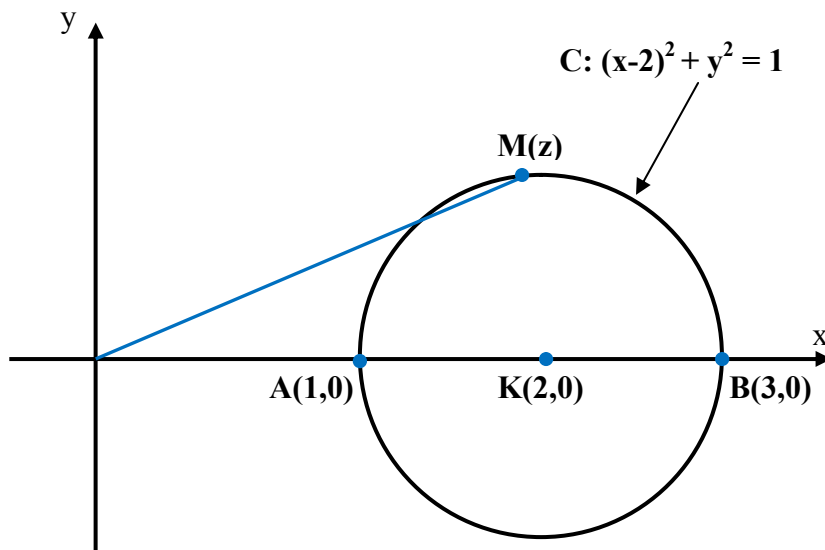
ΘΕΜΑ Β

B1.

$$(z-2)(\overline{z-2}) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow (z-2) + (\overline{z-2}) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z-2| = -2 & \text{απορρίπτεται, αφού } |z-2| \geq 0 \\ |z-2| = 1 & \text{δεκτή} \end{cases} \quad \text{ή}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$ και εξίσωση $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$



Είναι $|z| = |(z-2)+2| \leq |z-2| + 2 = 1 + 2 = 3$

Άρα: $|z| \leq 3$

B2.

Οι z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$

άρα οι z_1, z_2 είναι συζυγείς, δηλαδή $z_2 = \bar{z}_1$ ⁽¹⁾ και ισχύουν τα εξής:

$$\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \quad \operatorname{Im}(z_1) = -\operatorname{Im}(z_2)$$

Ακόμα ισχύει ότι $z_1 + z_2 = -\beta$ ⁽²⁾ $z_1 \cdot z_2 = \gamma$ ⁽³⁾

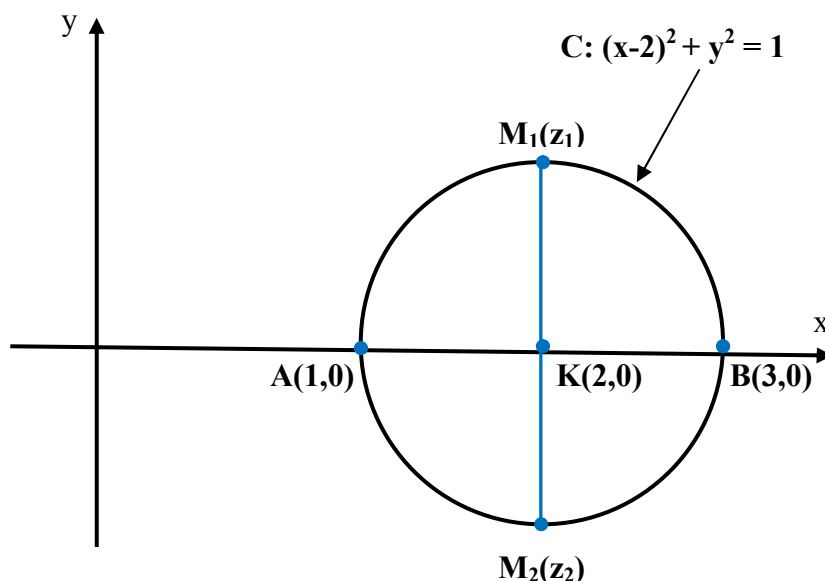
$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| &= 2 \Leftrightarrow \stackrel{(1)}{|\operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_1)|} = 2 \Leftrightarrow |2 \cdot \operatorname{Im}(z_1)| = 2 \Leftrightarrow 2|\operatorname{Im}(z_1)| = 2 \Leftrightarrow \\ |\operatorname{Im}(z_1)| &= 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z_1) = \pm 1 \end{aligned}$$

Αν $\operatorname{Im}(z_1) = 1$ και $z_1 = x_1 + y_1 i$ τότε $z_1 = x_1 + i$ και $y_1 = 1$ επειδή $M_1(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο C
 $(x_1 - 2)^2 + y_1^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + 1^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 2}$

Άρα $z_1 = 2 + i$ οπότε $z_2 = 2 - i$ και $z_1 + z_2 = 4 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} -\beta = 4 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -4}$

Και $(3) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z_1|^2 = 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 5}$

Αν $\text{Im}(z_1) = -1$ με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.



B3.

Έχουμε: $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$

Άρα, $|v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|$

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι:

$$|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|$$

Από B1 είναι: $|\alpha_0| \leq 3$, $|\alpha_1| \leq 3$, $|\alpha_2| \leq 3$, άρα:

$$|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1)$$

Η τελευταία γράφεται:

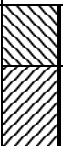
$$|v|^3 \leq 3(|v|^2 + |v| + 1) \Leftrightarrow |v|^3 - 3(|v|^2 + |v| + 1) \leq 0 \quad (1)$$

αρκεί να δείξουμε ότι η παραπάνω ανίσωση ισχύει όταν $|v| < 4$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 3$, η οποία ως πολωνομική

είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x^2 - 2x - 1)$

x	$1 - \sqrt{2}$	0	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$					

x	0	$1+\sqrt{2}$	x_0	4	$+\infty$
f(x)		-	-	o	+
					

Στο $[0, 1+\sqrt{2}]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή $f(0) = -3 < 0$ και $f(1+\sqrt{2}) < f(0) < 0$

Στο $[1+\sqrt{2}, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και στο $[1+\sqrt{2}, 4]$.

Όμως η f συνεχής στο $[1+\sqrt{2}, 4]$ και γνησίως αύξουσα

$$f(1+\sqrt{2}) < 0$$

$$f(4) = 64 - 63 = 1 > 0$$

Άρα, από θεώρημα Bolzano και λόγω της μονοτονίας υπάρχει μια ακριβώς ρίζα x_0 της f

που ανήκει στο $(1+\sqrt{2}, 4)$ και τότε θα ισχύει: $f(x) \leq f(x_0) = 0$ στο $[1+\sqrt{2}, x_0]$

$f(x) > f(x_0) = 0$ στο $(x_0, 4]$ άρα και στο $(x_0, +\infty)$

Επομένως, η $f(x) \leq 0$ όταν $x \in (0, x_0]$ με $x_0 < 4$, άρα και η ανίσωση (1) ισχύει όταν $|v| < 4$ αφού $|v| > 0$.

Β τρόπος:

Έστω $|v| \geq 4$. Έχουμε: $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$

$$\text{Άρα, } |v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|$$

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι:

$$|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|$$

Από Β1 είναι: $|\alpha_0| \leq 3$, $|\alpha_1| \leq 3$, $|\alpha_2| \leq 3$, άρα: $|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1)$

Η τελευταία γράφεται:

$$|v|^3 \leq 3 \cdot \frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1} \quad \begin{array}{l} \text{είναι } |v| - 1 > 0, \text{ αφού } |v| \geq 4 \end{array} \Leftrightarrow |v|^3 (|v| - 1) \leq 3(|v|^3 - 1) \Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3$$

Όμως, $4|v|^3 - 3 < 4|v|^3$ άρα $|v|^4 \leq 4|v|^3 \Leftrightarrow |v| < 4$ που είναι άτοπο.

Άρα $|v| < 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$(f(x)+x)(f'(x)+1)=x \Rightarrow (f(x)+x)(f(x)+x)'=x \Rightarrow \left[\frac{(f(x)+x)^2}{2} \right]' = \left(\frac{x^2}{2} \right)' \Leftrightarrow$$

$$\left[(f(x)+x)^2 \right]' = (x^2)' \Leftrightarrow (f(x)+x)^2 = x^2 + c, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Για } x=0: (f(0)+0)^2 = 0^2 + c \\ \text{από υπόθεση } f(0)=1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Τότε η (1)} \Rightarrow (f(x)+x)^2 = x^2 + 1 \quad (2)$$

$$\text{Όμως } x^2 + 1 > 0 \text{ άρα } x^2 + 1 \neq 0 \text{ άρα } (f(x)+x)^2 \neq 0$$

$$\text{οπότε και } f(x)+x \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Όμως } f \text{ παρ/μη στο } \mathbb{R} \text{ άρα και συνεχής οπότε } f(x)+x \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f(x)+x \neq 0 \text{ άρα } f(x)+x \text{ διατηρεί πρόσημο στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{Όμως } f(0)+0 = 1+0 = 1 > 0 \text{ άρα } f(x)+x > 0.$$

$$(2) \left. \begin{array}{l} (f(x)+x)^2 = x^2 + 1 \\ f(x)+x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x)+x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{\Gamma 2.} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

Η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' - (x)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή $h(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

- Αν $x \leq 0$ τότε $h(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ ως άθροισμα αρνητικών αριθμών

- Αν $x > 0$ τότε $h(x) < 0$ διότι:

$$x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x^2 < x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 < 1 \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Άρα } h(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε } f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{h(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και $1-1$.

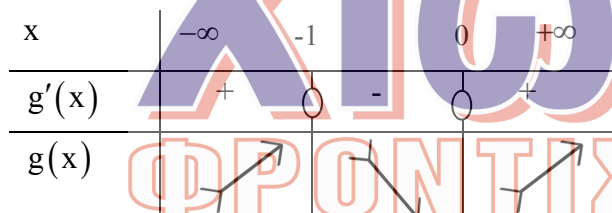
$$\text{Επειδή } f(0) = 1 \text{ η εξίσωση } f(g(x)) = 1 \text{ γίνεται } f(g(x)) = f(0).$$

Όμως η f είναι $1-1$, άρα αρκεί να βρω το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0$$

$$g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$$



Θα βρω το σύνολο τιμών για καθένα από τα διαστήματα:

$$A_1 = (-\infty, -1] \quad A_2 = [-1, 0] \quad A_3 = [0, +\infty)$$

$$\bullet \quad g(A_1) \stackrel{g}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right] \stackrel{(1),(2)}{=} \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right], \text{ διότι: } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad (1)$$

$$g(-1) = (-1)^3 + \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - 1 = -1 + \frac{3}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\bullet \quad g(A_2) \stackrel{g}{=} [g(0), g(-1)] \stackrel{(2),(3)}{=} \left[-1, -\frac{1}{2} \right], \text{ αφού } g(0) = 0^3 + \frac{3 \cdot 0^2}{2} - 1 = -1 \quad (3)$$

- $g(A_3) \stackrel{g}{=} \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right]^{(3),(4)} = [-1, +\infty), \text{ επειδή}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad (4)$$

Επειδή $g(A_1) = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right]$ και $g(A_2) = \left[-1, -\frac{1}{2} \right]$, $g(x) < 0$ για κάθε $x \in A_1 \cup A_2$

Όμως, $g(A_3) = [-1, +\infty)$, οπότε το 0 περιέχεται στο $g(A_3)$, άρα υπάρχει ρίζα της $g(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$ η οποία είναι μοναδική επειδή η g στο $[0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1.

Τελικά, η εξίσωση $f(g(x)) = 1$ έχει μία ακριβώς ρίζα που ανήκει στο $(0, +\infty)$.

Γ3.

Θεωρώ $t(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \exp x$ και το $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη άρα έχει αρχική την $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$\varphi(x) = x - \frac{\pi}{4}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

άρα $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = - \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt = -F(\varphi(x))$ παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων άρα και

συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ως σύνθεση συνεχών

$\varepsilon\varphi x$ συνεχής στο $\mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ άρα και στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

τελικά

η $t(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξη συνεχών

$$t(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \varepsilon\varphi 0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt$$

Όμως $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι:

- Αν $x \geq 0$ τότε $x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2 + 1} > x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$
- Αν $x < 0$ τότε ισχύει $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$ ως άθροισμα θετικών αριθμών

Άρα $f(x) > 0$ στο $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ άρα $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt > 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} t(0) > 0$ (2)

$$t\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 0 - f(0) \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1 \cdot 1 = -1 < 0$$
 (3)

$$(2), (3) \Rightarrow t(0) \cdot t\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$$

Άρα ισχύει για την $t(x)$ το Θ. Bolzano στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ τέτοιο ώστε } t(x_0) = 0 \Rightarrow \int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon\varphi x_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon\varphi x_0$$

$$h(x) = \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt \cdot \eta\mu x \text{ στο } \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

2^{ος} τρόπος: Θεωρώ συνάρτηση

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη άρα έχει αρχική την $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$\varphi(x) = x - \frac{\pi}{4}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

άρα $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt = F(\varphi(x))$ παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων άρα και συνεχής στο

$\mathbb{R}$ οπότε και στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, το ίδιο ισχύει για την $\eta\mu x$,

οπότε η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ με

$$h'(x) = \left(\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt \cdot \eta\mu x \right)' = \left(\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt \right)' \eta\mu x + \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt (\eta\mu x)' =$$

$$f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)' \eta\mu x + \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt \cdot \sigma\upsilon\nu x = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x + \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt \cdot \sigma\upsilon\nu x \quad (1)$$

Επιπλέον:

$$h(0) = \int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)dt \cdot \eta\mu 0 = 0, \quad h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^0 f(t)dt \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4} = 0, \quad \text{άρα ισχύει } h(0) = h\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{ οπότε}$$

ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρ. Rolle.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0 - \frac{\pi}{4})\eta\mu x_0 + \overset{(1)}{\int_0^{x_0 - \frac{\pi}{4}}} f(t)dt \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 \overset{\sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0}{=} 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_0 - \frac{\pi}{4})\eta\mu x_0 + \int_0^{x_0 - \frac{\pi}{4}} f(t)dt \cdot \sigma\upsilon\nu x_0}{\sigma\upsilon\nu x_0} = 0 \Leftrightarrow f(x_0 - \frac{\pi}{4})\epsilon\phi x_0 + \int_0^{x_0 - \frac{\pi}{4}} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0 - \frac{\pi}{4})\epsilon\phi x_0 = - \int_0^{x_0 - \frac{\pi}{4}} f(t)dt \Leftrightarrow f(x_0 - \frac{\pi}{4})\epsilon\phi x_0 = \int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt$$

ΧΙΩΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

(i)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι παραγωγίσιμη και στο 1 με

$$f'(1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} \quad (1)$$

Για τα h κοντά στο 0

$$\frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = \frac{f(1+5h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{h} = \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \quad (2)$$

$$\bullet \quad \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} \stackrel{\theta \acute{\epsilon} \tau \omega \ 5h=w}{=} \frac{f(1+w) - f(1)}{\frac{w}{5}} = 5 \frac{f(1+w) - f(1)}{w} \quad \text{οπότε}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} = \lim_{w \rightarrow 0} \left[5 \frac{f(1+w) - f(1)}{w} \right] \stackrel{(1)}{=} 5 \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(1+w) - f(1)}{w} = 5f'(1) \quad (3)$$

$$\bullet \quad \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \stackrel{\theta \acute{\epsilon} \tau \omega \ u=-h}{=} \frac{f(1+u) - f(1)}{-u} \quad \text{οπότε}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{-u} \stackrel{(1)}{=} (-1) \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = -f'(1) \quad (4)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right] = 0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \stackrel{(4)}{0}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = 0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} 5f'(1) - (-f'(1)) = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$$

(ii) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Για τα $x, 1 \in (0, +\infty)$ με

$$\bullet \quad 0 < x < 1 \stackrel{f'}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad f'(x) < 0 \quad \text{στο} \quad (0, 1)$$

$$\bullet \quad x > 1 \stackrel{f'}{\Rightarrow} f'(x) > f'(1) = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad f'(x) > 0 \quad \text{στο} \quad (1, +\infty)$$

Συνοπτικά: f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη, $f'(x) < 0$ στο $(0, 1)$ και

$f'(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$ άρα η f στο $x_0 = 1$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Δ2. i)

$$g(x) = \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$$

Η $\frac{f(x)-1}{x-1}$ είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως πράξη συνεχών

(f συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και στο $(1, +\infty)$)

$a \in (1, +\infty)$, άρα η $g(x) = \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$ είναι η αρχική της $\frac{f(x)-1}{x-1}$ στο $(1, +\infty)$

άρα παραγωγίσιμη με $g'(x) = \left(\int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt \right)' = \frac{f(x)-1}{x-1}$

Η f (από το Δ_1) παρουσιάζει ελάχιστο στο 1, το $f(1)=1$, άρα ισχύει

$f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$,

άρα $f(x) > f(1)$ για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f(x)-1 > 0$ και $x-1 > 0$ στο $(1, +\infty)$.

Άρα, $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} > 0$ στο $(1, +\infty)$, άρα g : γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

(ii)

$g(x) = \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα συνεχής στο $(1, +\infty)$ οπότε έχει αρχική την

$G(x)$ ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $G'(x) = g(x)$.

Θεωρώ:

$$H(t) = \int_t^{t+1} g(u) du = [G(u)]_t^{t+1} = G(t+1) - G(t) = (G \circ \varphi)(t) - G(t), \text{ με } \varphi(t) = t+1$$

$$D_{G \circ \varphi} = \{t \in \mathbb{R} / t+1 > 1\} = (0, +\infty)$$

$$D_H = D_{G \circ \varphi} \cap D_G = (1, +\infty)$$

Η δοσμένη ανίσωση $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du$ γράφεται:

$$H(8x^2+5) > H(2x^4+5) \text{ ή } H(t_1) > H(t_2),$$

$H(8x^2+5), H(2x^4+5)$ ορίζονται στο $\mathbb{R}$ διότι $t_1 = 8x^2+5 > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $t_2 = 2x^4+5 > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$H'(t) = (G(t+1) - G(t))' = G'(t+1)(t+1)' - G'(t) = g(t+1) - g(t) > 0 \text{ διότι}$$

$1 > 0 \Rightarrow t+1 > t$ για κάθε $t > 1$ και g είναι $\nearrow$

Επομένως $H'(t) > 0$ για κάθε $t > 1$ επομένως η H $\nearrow$ στο $(1, +\infty)$

$$H(t_1) > H(t_2) \xRightarrow{H \nearrow} t_1 > t_2 \Rightarrow 8x^2+5 > 2x^4+5 \Leftrightarrow 2x^4-8x^2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2-4) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$$

Δ3. (i)

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} \text{ παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων}$$

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2} \quad (1)$$

f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, $x > 1$ άρα και στο $[1, x]$ οπότε συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$ άρα ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής οπότε υπάρχει $x_0 \in (1, x)$

τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \stackrel{f(1)=1}{\Leftrightarrow} f'(x_0) = \frac{f(x)-1}{x-1} \Leftrightarrow f'(x_0)(x-1) = f(x)-1 \quad (2)$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - f'(x_0)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{[f'(x) - f'(x_0)](x-1)}{(x-1)^2} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x-1}$$

$$\text{Όμως } 1 < x_0 < x \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x_0) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - f'(x_0) > 0 \text{ για } x > 1$$

$$x-1 > 0$$

άρα $g''(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$, g συνεχής στο $(1, +\infty)$ άρα g κυρτή στο $(1, +\infty)$.

(ii) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ και $\alpha > 1$, άρα είναι παραγωγίσιμη και

στο α , επομένως η C_g στο $A(\alpha, g(\alpha))$ δέχεται εφαπτομένη με κλίση $g'(\alpha)$ και εξίσωση:

$$ε: y - g(\alpha) = g'(\alpha) \cdot (x - \alpha) \quad (1)$$

$$g(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} \frac{f(t)-1}{t-1} dt = 0 \quad (2)$$

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}, \text{ άρα } g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \quad (3)$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} y - 0 = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow y = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \cdot (x - \alpha) \quad (4)$$

Όμως η g είναι κυρτή, άρα η C_g βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη,

$$\text{εκτός από το σημείο επαφής, άρα λόγω της (4): } g(x) \geq \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \cdot (x - \alpha)$$

Επειδή η C_g ταυτίζεται με την εφαπτομένη μόνο στο σημείο επαφής η ισότητα

$$\text{ισχύει μόνο για } x = \alpha. \text{ Δηλαδή η } g(x) = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \cdot (x - \alpha) \text{ ισχύει μόνο για } x = \alpha.$$

Τότε η εξίσωση:

$$(\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha) \Leftrightarrow (\alpha-1)g(x) = (f(\alpha)-1)(x-\alpha) \stackrel{\alpha > 1}{\Leftrightarrow}$$

$$g(x) = \frac{(f(\alpha)-1)(x-\alpha)}{\alpha-1} \text{ έχει μοναδική λύση, την } x = \alpha.$$